

Acqua, sapone e superfici minime



Un gioco matematico





Area: Matematica

Obiettivi dell'attività:

- Suscitare la curiosità dei bambini nei confronti di un problema concreto (le forme che l'acqua saponata forma immergendo dei contorni di fil di ferro) e portarli a porsi delle domande e a compiere delle osservazioni.
- Dare un esempio di fenomeno fisico che può essere studiato tramite modelli matematici.

Durata media: 30-45 minuti.

Tipo di attività: una prima fase di discussione, una seconda di gioco/esperimento con l'acqua e sapone.

A chi è rivolto: bambini delle elementari. A seconda dell'età si può rimodulare la fase di discussione.

Come usarlo in classe: gioco di approfondimento di matematica.

Competenze necessarie agli studenti: nessuna specifica competenza è strettamente necessaria.

Nella prima fase di discussione potrebbe essere utile che gli studenti sappiano leggere e scrivere.

Competenze necessarie all'insegnante: nessuna specifica competenza.

CHE COSA SI VUOLE INVESTIGARE/ COMPETENZE SVILUPPATE

Questa attività è costituita da una prima fase di discussione e da una seconda operativa dove si creano e osservano le superfici di acqua saponata.

Gli obiettivi della prima fase possono essere:

- Interrogarsi su che cosa sia la matematica: matematica non è (solo) fare delle operazioni, ma studiare dei problemi, che possono avere natura geometrica, aritmetica, provenire da osservazioni fisiche o altro..
- Spiegare l'idea matematica di superficie
- Spiegare il concetto di minimo

Durante la seconda fase il principale obiettivo è invece

- Suscitare curiosità e sviluppare la capacità di osservazione: giocare con le bolle di sapone è semplice e divertente. Si può portare il bambino a farsi delle domande: che forma assumerà la bolla di sapone? Perché? Perché quando due bolle si attaccano si formano delle pareti piatte?

MATERIALI NECESSARI

Nella prima fase potrebbe servire materiale per scrivere (lavagna o cartelloni).

Nella seconda fase serve:

- Contenitori per l'acqua saponata (si consiglia almeno 20 cm di altezza e 15cm di larghezza e profondità)
- Sapone per i piatti
- Sagome di filo di ferro (quello usato per il giardinaggio va benissimo)

Il numero di contenitori e di sagome dipende da quanto è numerosa la classe.

Si consiglia un contenitore ogni 5-7 bambini al massimo.

PREPARAZIONE PRIMA DELL'ATTIVITÀ

- **Preparazione della soluzione di sapone:** si consiglia di preparare la soluzione in anticipo, in modo tale che, al momento di usarla, non ci sia schiuma sulla superficie. Per questo tipo di attività non è necessario che la soluzione sia molto densa; delle dosi approssimative potrebbero essere: 1 parte di sapone e 4 di acqua, ma il gioco funziona anche con soluzioni più diluite. I contenitori devono essere abbastanza grandi e abbastanza pieni, in modo che tutti i contorni che si usano possano venire immersi completamente nella soluzione.
- **Preparazione dei contorni:** Possiamo immergere in acqua e sapone qualsiasi forma riusciamo a costruire con il filo di ferro. Ricordarsi sempre di lasciare anche un pezzo di filo per tenere in mano e immergere la struttura.

PRIMA PARTE DI DISCUSSIONE

Si può introdurre l'attività in vari modi, anche in base all'età e alle esigenze della classe.

Ecco alcuni spunti.

- Si può chiedere ai ragazzi (magari divisi a gruppi) di raccogliere parole e idee che hanno a che fare con la matematica e/o azioni che compie una persona che fa matematica. Leggendo insieme le parole trovate si può dividerle in azioni (studiare, leggere, scrivere...), strumenti (operazioni, righello, matita...), concetti (numeri, figure, problemi...) o altre categorie che potrebbero essere necessarie. Il **ragionamento deve essere portato sull'idea che quello che fa un matematico è studiare dei problemi, cercare delle risposte a delle domande usando un particolare linguaggio che è la matematica.**
- In alternativa si può partire con la domanda "cosa centrano le bolle di sapone con la matematica?". Le risposte dei ragazzi saranno varie e fantasiose. La vostra risposta sarà che la superficie assunta dall'acqua e sapone è la soluzione del seguente problema matematico: "Trovare tra tutte le possibili superfici che hanno il contorno che abbiamo costruito con il filo di ferro, quella con area minima, più piccola". È un'occasione per spiegare 3 concetti molto importanti: **superficie, area e minimalità.**
- Per una discussione un po' più tecnica, si può partire dal concetto di minimo che in matematica (e in particolare in calcolo delle variazioni) è un concetto molto importante. Bisogna spiegare che, quando si parla di minimo si deve sempre avere in chiaro che **cosa stiamo minimizzando** e in quale spazio stiamo minimizzando (vedi allegato). Può essere utile, prima di passare al problema delle superfici minime, fare un esempio semplice: qual è la linea più corta che congiunge due punti? E se devo congiungerne tre?

SECONDA PARTE PRATICA

Con davanti la bacinella d'acqua e sapone e i contorni di fil di ferro, si spiega ai ragazzi quello che si sta per fare. Immergendo un contorno nella soluzione, si formerà una pellicola di sapone che assumerà una forma particolare.

Perchè proprio quella e non un'altra?

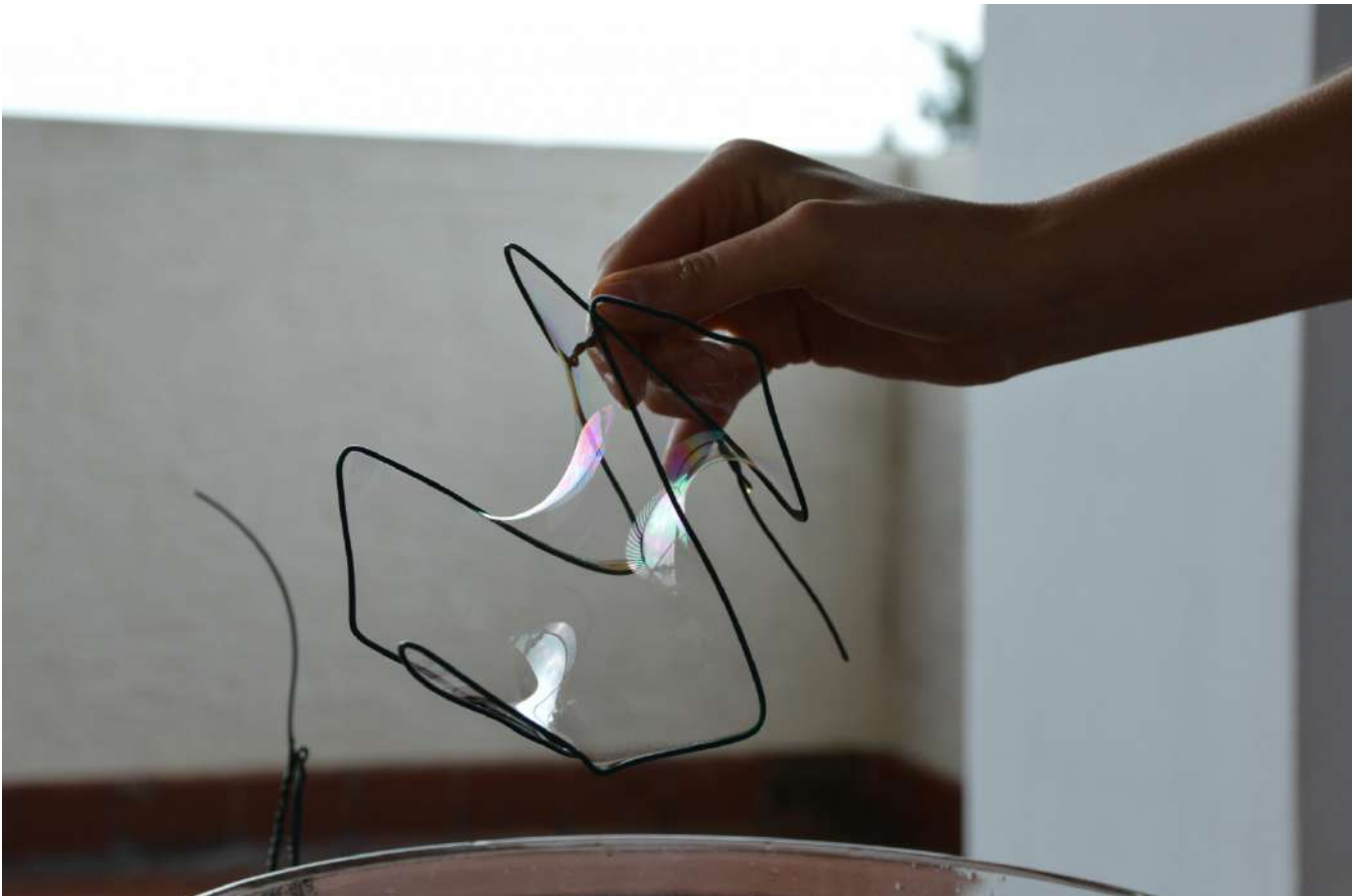
La matematica spiega che **la forma assunta è quella con area minore** tra tutte le superfici che hanno il bordo che stiamo per immergere nella soluzione.

Per questo motivo i matematici chiamano queste superfici "superfici minime".

Comincia il gioco. I ragazzi possono scegliere il contorno che preferiscono e provare a vedere cosa succede.

Si possono suggerire alcune domande/problemi:

- Immergendo uno stesso contorno viene sempre la stessa superficie?
(La risposta è quasi sempre sì... da un punto di vista puramente matematico, potrebbero comparire diverse soluzioni e inoltre nella pratica quello che si vede può dipendere anche da come si immerge il filo e da altri fattori. Di sicuro ci sono delle superfici che ritornano più di una volta)
- Provare a pensare a che superficie verrà prima di immergere il filo. É facile indovinare?
- Se si formano diverse bolle, come si appoggiano l'una all'altra?
(Risposta: formando un piano, se sono due, formando angoli di 120 gradi se sono tre)



ALLEGATO 1: Il concetto di minimo

In matematica, e in particolare in quel ramo che si chiama **Calcolo delle variazioni**, esistono molti problemi che possono essere formulati nei seguenti termini:

Trovare l'elemento tra tutti quelli ammissibili, che rendono minima (o massima) una certa quantità.

Facciamo degli esempi tratti dalla vita concreta:

- Trovare il percorso che collega la casa con la scuola che rende minimo il tempo impiegato per percorrerlo;
- Trovare la strada per raggiungere una certa città che renda minima la benzina necessaria;
- Acquistare il vestito più bello possibile tra tutti quelli che costano meno di 100 euro.

E tanti altri esempi che possono venirci in mente.

I due elementi più importanti nel formulare questi problemi sono:

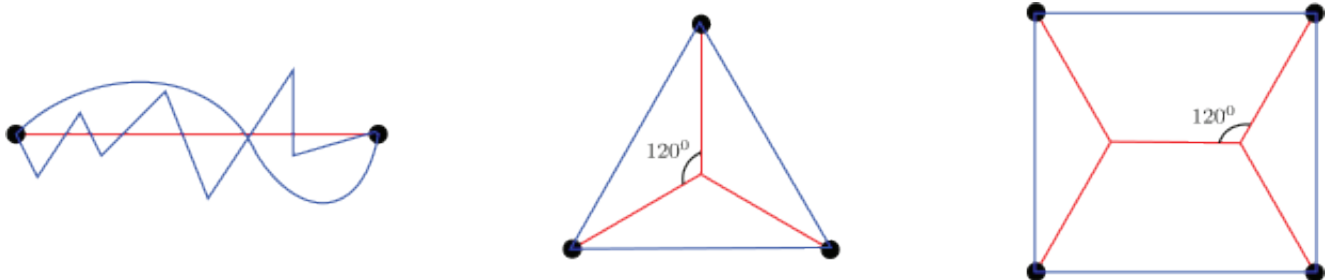
- La quantità che si sta minimizzando (che in matematica si chiama funzionale), come il tempo o il costo della benzina;
- l'insieme in cui cercare le possibili soluzioni, come tutte le possibili strade che possiamo effettivamente percorrere (un percorso che dovesse attraversare un muro non sarebbe accettabile!!) o i vestiti che sono in vendita nel negozio in cui siamo.

Chiarita l'importanza di questi due concetti, si può presentare un primo esempio matematico: se consideriamo due punti, qual è la linea di lunghezza minore possibile che li congiunge? In questo caso la quantità da minimizzare è la lunghezza e le possibili soluzioni sono tutte le linee che possiamo tracciare partendo dal primo punto e arrivando nel secondo. La soluzione del problema di minimo è chiaramente il segmento.

Un problema un po' più complicato è come si fa a unire i tre vertici di un triangolo equilatero con delle linee la cui lunghezza complessiva sia la minore possibile? (In termini pratici: come si fa a costruire delle strade che uniscano la casa, la scuola e il parco usando meno cemento possibile?)

E i quattro vertici di un quadrato?

Le soluzioni sono mostrate in figura e sono l'equivalente monodimensionale di quello che vedremo immergendo in acqua e sapone il cubo e il tetraedro!



ALLEGATO 2: Il problema di Plateau

Il problema di Plateau è il seguente:

Presi una curva chiusa nello spazio, trovare la superficie con area minima tra tutte quelle che hanno come bordo la curva data.

Questo problema prende il nome dal fisico belga Joseph Plateau (1801-1883) che lo studiò.

Plateau si accorse che le "lamine di sapone" che si osservavano immergendo dei contorni di fil di ferro in acqua saponata sono delle soluzioni del problema sopra formulato.

Il motivo di questo fatto è da ricercare nelle proprietà fisiche dell'acqua saponata, ma per avere un'idea intuitiva di cosa significhi superficie minima, possiamo pensare al seguente esempio.

Supponiamo di avere un telaio di forma, per esempio quadrata, e di tendere una tela, come quella di un quadro. La tela si disporrà su un piano, perchè qualsiasi altro modo di disporla necessiterebbe di più tela. In effetti le superfici minime che si formano in corrispondenza di contorni piatti, sono tutte contenute in dei piani. È un po' più difficile immaginare che cosa si forma quando il contorno non è piatto ma per questo, come ci insegna Plateau, può essere utile giocare con acqua e sapone!

ALLEGATO 3: Alcuni contorni

Il cubo: Costruite con il fil di ferro lo scheletro di un cubo. Immergendolo si formerà una superficie quadrata al centro collegata con gli otto vertici del cubo. È l'equivalente tridimensionale della soluzione del problema di unire quattro punti con linee di lunghezza complessiva più piccola possibile. (Non è semplicissimo ottenere la figura descritta, spesso il sapone coprirà solo alcune facce e si disporrà in modo diverso, ma con un po' di pazienza e tentativi si riesce!)

Il tetraedro: Costruite con il fil di ferro lo scheletro di un tetraedro. Immergendolo si formeranno dei piani che si uniscono al centro del tetraedro formando angoli di 120 gradi. È l'equivalente del problema di unire tre punti con linee di lunghezza complessiva più piccola possibile. (Questa figura è molto più facile da ottenere e più stabile rispetto a quella col cubo!)

L'elica: Costruite una struttura a elica. La superficie minima che vedrete apparire si chiama elicoide e assomiglia a una scala a chiocciola.

Due cerchi: Preparate due cerchi identici. Immergeteli in acqua tenendoli sovrapposti e, dopo averli estratti allontanateli con cautela. Inizialmente potrebbe formarsi una superficie circolare al centro; se la scoppiate, vedrete comparire una specie di "cilindro curvo", le cui pareti sono rientranti. Questa superficie si chiama catenoide: se prendiamo una catena e teniamo i due estremi alla stessa altezza, la forma che la catena assume è uguale al profilo della superficie di sapone osservata prima. Questa curva si chiama catenaria, e la catenoide è la superficie ottenuta facendo ruotare la catenaria intorno a un asse. I due cerchi si possono usare in altri modi, per esempio incastrandoli uno dentro l'altro e facendo girare in vario modo.

Il nodo: Costruite una sagoma come se fosse un nodo. Una delle possibili superfici che otterrete si chiama nastro di Moebius ed è una superficie non orientabile. Cosa significa? Prendete una striscia di carta lunga e stretta e coloratene le facce in modo diverso. Ora incollate tra loro i due lati corti, compiendo prima una torsione, in modo che angoli opposti coincidano. Se ora fate scorrere la superficie sotto il vostro dito, passerete da una faccia all'altra senza soluzione di continuità: le due facce non sono più distinguibili e questo è quello che determina la non orientabilità del nastro di Moebius.

Il tendone: Costruite una forma il cui bordo sia "oscillante", come quello in figura. La superficie minima che compare assomiglia a quella di alcuni tendoni, di alcune tensostrutture. In effetti in alcuni contesti di ingegneria o architettura, il concetto di superficie minima è associato a proprietà di stabilità.